Tenvek / Mouhamedou / Moulay zeyn
Fatimetou / Med lemine
Minetou / Abdelafu

ERRaja
7C

Exercice 3

Déterminer la nature du triangle ABC dans chacun des cas suivants:

1) $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 2) $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = i$ 3) $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

4) $\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} = 2i$ 5) $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

Exercice 3: Solution:

	Relation Complexe	Nature du triangle ABC	Justification
1	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$	ABC est équilatéral	Car $\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$
2	$\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = i$	ABC rectangle isocèle en B	Car le rapport $= i$
3	$\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$	ABC équilatéral	Car $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$
4	$\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} = 2i$	ABC rectangle en C	imaginaire pur
5	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$	ABC est isocèle en A	$\left\| \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{2} \right\| = 1$

http://maurimath.net/Espaceeleves.php

Tenvek / Mouhamedou / Moulay Zeyn
Fatimetou / Medlemine
Minetou / Abdelafi

ERRaja
7C

Exercice 6

Dans $\mathbb{C}$ on donne : $a=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}+i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}$

1) Calculer a^2. Donner le module et un argument de a^2.
2) En déduire le module et un argument de a.
3) En déduire $\cos\frac{5\pi}{12}$, $\sin\frac{5\pi}{12}$.
4) Donner les entiers naturels n tels que a^n soit réel.

Exercice 6 : Solution :

1) On a : $a^2=\left(\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}+i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}\right)^2$

$a^2=\frac{2-\sqrt{3}}{2}+2i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}\times\frac{2+\sqrt{3}}{2}}-\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

$a^2=\frac{-2\sqrt{3}}{2}+2i\sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow a^2=-\sqrt{3}+i$

• Module : $|a^2|=|-\sqrt{3}+i|=\sqrt{3+1} \Rightarrow |a^2|=2$

• Argument : Soit θ un réel telque $\arg a^2=\theta$

Alors : $\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\theta=\frac{1}{2} \Rightarrow$ $\arg a^2=\frac{5\pi}{6}$.

2) Module et argument de a :

• Module : $|a^2|=2 \Rightarrow |a|=\sqrt{2}$

• Argument : $\arg a^2=\frac{5\pi}{6} \Rightarrow 2\arg a=\frac{5\pi}{6}+2K\pi$.

$\arg a=\frac{5\pi}{12}+K\pi$; $K\in\{0,1\}$

Soit $K=0 \Rightarrow \arg a=\frac{5\pi}{12}$

Soit $K=1 \Rightarrow \arg a=\frac{5\pi}{12}+\pi=\frac{17\pi}{12}$

Comme $Re(a)>0$ et $Im(a)>0$,

$\arg a\neq\frac{17\pi}{12}$

En fin, $\arg a=\frac{5\pi}{12}$

3) D'après ce qui précède, On déduit que

$\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos\frac{5\pi}{12}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$

$\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}}{2} \Rightarrow \sin\frac{5\pi}{12}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$

4) Le nombre a^n est réel si et seulement si $\arg a^n=K\pi$ où $K\in\mathbb{Z}$

$\arg a^n=K\pi \Leftrightarrow \frac{5n\pi}{12}=K\pi \Leftrightarrow 5n=12K \Leftrightarrow$

$n=\frac{12K}{5}$

n est un entier naturel et le nombre 12 n'est pas divisible par 5,

Donc K est divisible par 5.

On prend $K=5K'$ avec $K'\in\mathbb{Z}$.

$\arg a^n=K\pi \Leftrightarrow n=12\times\frac{K}{5} \Leftrightarrow n=12K'$

Alors, l'ensemble des valeurs de n telque a^n soit réel c'est les multiples de 12.

Tenvek/Mouhamedou/Moulay Zein
Fatimetou/Medlemine
Minetou/Abdellahi

ERRasa
7C

Exercice 9

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante: $z^{2016} = \bar{z}$

Exercice 9: Solution:

$z^{2016} = \bar{z}$

On constante que $z = 0$ est de solution de (E)

On supose desormais que $z \neq 0$.

On a $|z^{2016}| = |\bar{z}| \Rightarrow$

$|z|^{2016} = |z| \Rightarrow |z|^{2015} = 1$

$\Rightarrow |z| = 1$ Car

$\begin{cases} |z| \in \mathbb{R}^* \\ |z| \neq 0 \end{cases}$

Multiplication (E) par z

$z \times z^{2016} = z\bar{z} \Rightarrow z^{2017} = |z|^2$

$\Rightarrow z^{2017} = 1$ Car $|z|^2 = 1^2 = 1$

donc la solutions sont

$z_k = e^{i\frac{2k\pi}{2017}}$; $k \in \{0, 1, \dots 2016\}$.

D'où l'ensemble des solutions

$S = \{0, z_0, z_1, z_2 \dots z_{2016}\}$

Ténvek iMouhamedou/MoulayZeyn.
Fatimetou | OledLemine
Minetou | Abdelafi

ER Raja
7C

Exercice 12

α et x sont deux réels ; et n entier $n \geq 1$.

1) Simplifier les expressions suivantes:

$$C_n = \cos\alpha + \cos(x+\alpha) + \cos(2x+\alpha) + \cdots + \cos(nx+\alpha)$$

$$S_n = \sin\alpha + \sin(x+\alpha) + \sin(2x+\alpha) + \cdots + \sin(nx+\alpha)$$

2) En déduire :

$$C'_n = \cos(x+\alpha) + 2\cos(2x+\alpha) + \cdots + n\cos(nx+\alpha)$$

$$S'_n = \sin(x+\alpha) + 2\sin(2x+\alpha) + \cdots + n\sin(nx+\alpha)$$

Exercice 12 : Solution :

1) $C_n = \cos\alpha + \cos(x+\alpha) + \cos(2x+\alpha) + \cdots + \cos(nx+\alpha)$

$S_n = \sin\alpha + \sin(x+\alpha) + \sin(2x+\alpha) + \cdots + \sin(nx+\alpha)$

$C_n + iS_n = (\cos\alpha + i\sin\alpha) + (\cos(x+\alpha) + \sin(x+\alpha)) + ((\cos(2x+\alpha) + \sin 2x+\alpha)$
$+ \cdots (\cos(nx+\alpha) + \sin(nx+\alpha))$

$= e^{i\alpha} + e^{i(\alpha+x)} + e^{i(\alpha+2x)} + \cdots + e^{i(\alpha+nx)}$

$= e^{i\alpha}[1 + e^{ix} + e^{i2x} + \cdots + e^{inx}]$

$e^{i\alpha}\left[\frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}\right]$

2) $e^{ix} + 2e^{i2x} + 3e^{3ix} + \cdots n e^{inx}$

$e^{ix} + e^{i2x} + \cdots + e^{ixn} = C_n + iS_n = K_n$

$e^{i3x} + \cdots + e^{inx} = K_n - e^{ix} - e^{i2x}$

$e^{ixn} \quad K_n - K_{n-1}$

$T_n = \sum_{K=0}^{n} K_n - K$

Tenvek / Mouhamedou / Moulay Zeyn
Fatimetou / Med Lemine
Minetou / Abdelahi

ER Raja
7C.

Exercice 15

Montrer que les points M_1, M_2, M_3 d'affixes z_1, z_2, z_3 sont alignés si et seulement si $z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_3}+z_3\overline{z_1}=\overline{z_1}z_2+\overline{z_2}z_3+\overline{z_3}z_1$.

Exercice 15 Solution

$M_1(z_1)$; $M_2(z_2)$, $M_3(z_3)$

M_1 ; M_2 ; M_3 sont alignés $\Leftrightarrow$

$(\overrightarrow{M_3M_1}, \overrightarrow{M_3M_2}) = 0\ [\pi] \Leftrightarrow$

$\arg \dfrac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} = 0\ [\pi] \Leftrightarrow$

$\dfrac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow$

$\dfrac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} = \overline{\left(\dfrac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}\right)} \Leftrightarrow$

$\dfrac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} = \dfrac{\bar z_2 - \bar z_3}{\bar z_1 - \bar z_3} \Leftrightarrow$

$(z_2 - z_3)(\bar z_1 - \bar z_3) = (z_1 - z_3)(\bar z_2 - \bar z_3) \Leftrightarrow$

$z_2\bar z_1 - z_2\bar z_3 + z_3\bar z_3 = z_1\bar z_2 - z_3\bar z_2 + z_3\bar z_3 \Leftrightarrow$

$z_1\bar z_2 + z_2\bar z_3 + z_3\bar z_1 = \bar z_1 z_2 + \bar z_1 z_3 + \bar z_3 z_1$.

Tenvek/Mouhamedou/Moulay Zeyn
Fatimetou/Med Lemine
Minetou/Abdelahi

1

ER Raja
7C.

Exercice 18

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 3 cm).
On désigne par A ; B et C les points d'affixes respectives $1+5i$; $-1+i$ et $3i$.
Soit f l'application qui à tout point M du plan P, distinct de C, d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \frac{3iz+6+4i}{z-3i}$. On note f(M)=M'.

1) Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z dans les cas suivants :

a) $|z'| = 3$

b) $|z'-3i| = 3$

c) $z' \in \mathbb{R}$

d) $\arg z' = \frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$

e) $\arg z' = \frac{\pi}{2}$ $[\pi]$.

2) Montrer que les points A ; B ; M et M' sont cocycliques ou alignés.

Exercice 18 : Solution

1) Ensemble de points :

a) Soit (E_1) l'ensemble des points M du plan telque $|z'| = 3$.

On a : $|z'| = 3 \Rightarrow \left|\frac{3iz+6+4i}{z-3i}\right| = 3$

Alors $\left|\frac{3i\left[z+\frac{6+4i}{3i}\right]}{z-3i}\right| = 3$ d'où

$|3i|\left|\frac{z+\frac{6+4i}{3i}}{z-3i}\right| = 3.$

$\left|\frac{z+\frac{4}{3}-2i}{z-3i}\right| = 1$ (E_1) donc est la médiatrice du segment $[DC]$ où $D\left(-\frac{4}{3}, 2\right)$.

b) Soit (E_2) l'ensemble des points M du plan telsque $|z'-3i| = 3$

On a :

$|z'-3i| = 3 \Rightarrow \left|\frac{3iz+6+4i}{z-3i}\right| = 3 \Leftrightarrow$

$\left|\frac{3iz+6+4i-3iz-9}{z-3i}\right| = 3$

$\left|\frac{-3+4i}{z-3i}\right| = 3 \Leftrightarrow \frac{5}{|z-3i|} = 3 \Leftrightarrow$

$|z-3i| = \frac{5}{3}$ Soit $|z_M - z_C| = \frac{5}{3}$

(E_2) donc est le cercle de centre C et de rayon $\frac{5}{3}$.

c) Soit (E_3) l'ensemble des points M du plan telsque $z' \in \mathbb{R}$. On a :

$z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left(z' = 0 \text{ ou } \arg \frac{3iz+6+4i}{z-3i} = 0\ [\pi]\right)$.

Soit $z' = 0 \Leftrightarrow \frac{3iz+6+4i}{z-3i} = 0\ [\pi]$

$\Leftrightarrow$ Soit $z = 0 \Leftrightarrow 3iz+6+4i = 0$

$\Leftrightarrow z = -\frac{4}{3}+2i \Leftrightarrow M = D.$

Soit $\arg \dfrac{3iz+6+4i}{z-3i} = 0\ [\pi] \iff$

$\arg 3i + \arg \dfrac{z+\frac{6+4i}{3i}}{z-3i} = 0\ [\pi]$

$\iff \arg \dfrac{z+\frac{4}{3}-2i}{z-3i} = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi] \iff$

$\arg \dfrac{z_M - z_D}{z_M - z_C} = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi] \iff$

$(\vec{MC}, \vec{MD}) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.

M appartient au Cercle de diamètre [CD] privé de C et D.

En particulier si M est en D, $z' = 0$.

En fin, (E_3) est le Cercle de diamètre [CD] privé de C.

d) Soit (E_4) l'ensemble des points M du plan telsque $z' = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

On a : $\arg z' = \frac{\pi}{3}[2\pi] \iff \arg 3i + \arg \dfrac{z+\frac{6+4i}{3i}}{z-3i} = \dfrac{\pi}{3}[2\pi] \iff$

$\dfrac{\pi}{2} + \arg \dfrac{z+\frac{4}{3}-2i}{z-3i} = \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$

$\iff \arg \dfrac{z_M - z_D}{z_M - z_C} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi] \iff$

$\arg \dfrac{z_M - z_D}{z_M - z_C} = -\dfrac{\pi}{6}\ [2\pi] \iff (\vec{MC}, \vec{MD}) = -\dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$. (E_4) Donc est un arc (de sens indirect) d'un Cercle d'extrémités C et D exclus

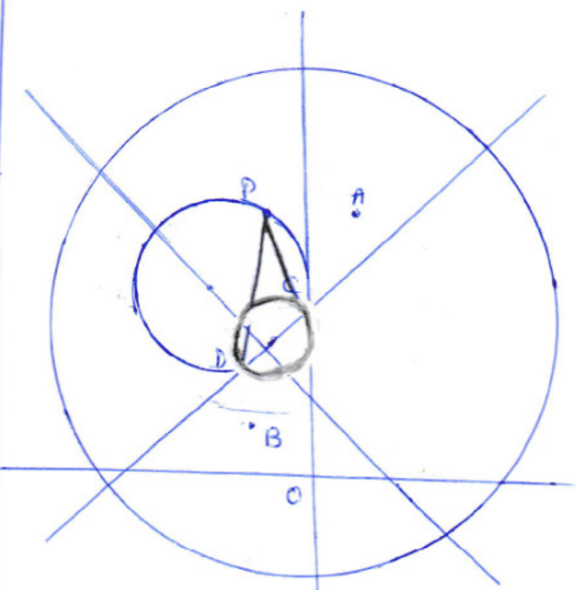
e) Soit (E_5) l'ensemble des points M du plan tels que $\arg z' = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$. On a :

$\arg z' = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi] \iff \dfrac{\pi}{2} + \arg \dfrac{z+\frac{4}{3}-2i}{z-3i} = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi] \iff$

$\arg \dfrac{z_M - z_D}{z_M - z_C} = 0\ [\pi] \iff$

$(\vec{MC}, \vec{MD}) = 0\ [\pi]$.

(E_5) donc est la droite (CD) privée de C et D.



2) Pour montrer que les points A, B, M et M' sont cocycliques ou alignés, il suffit de montrer que le nombre Z tel que

$Z = \dfrac{z' - z_A}{z' - z_B} \times \dfrac{z - z_B}{z - z_A}$ soit réel

On a : $Z = \dfrac{\frac{3iz+6+4i}{z-3i} - 1 - 5i}{\frac{3iz+6+4i}{z-3i} + 1 - i} \times \dfrac{z+1-i}{z-1-5i}$

Tenvek / Mouhamedou / Moulay Zeyn
Fatimetou / Med Lemine
Minetou / Abdelahi

2

ERRaja
7c.

Exercice 18 : Suite

$$\Leftrightarrow Z = \frac{\dfrac{3iz+6+4i-z+3i-5iz-15}{z-3i}}{\dfrac{3iz+6+4i+z-3i-iz-3}{z-3i}} \times \frac{z+1-i}{z-1-5i}$$

$$\Leftrightarrow Z = \frac{-2iz-z+7i-9}{2iz+z+i+3} \times \frac{z+1-i}{z-1-5i} \Leftrightarrow Z = \frac{(-2iz-1)z+7i-9}{(2i+1)z+i+3} \times \frac{z+1-i}{z-1-5i}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(-2i-1)\left[z+\frac{7i-9}{-2i-1}\right]}{(2i+1)\left[z+\frac{i+3}{2i+1}\right]} \times \frac{z+1-i}{z-1-5i} \Leftrightarrow Z = \frac{-\left[z+\frac{7i-9}{-2i-1}\right]}{z+\frac{i+3}{2i+1}} \times \frac{z+1-i}{z-1-5i}$$

$$Z = \frac{-(z-1-5i)}{z+1-i} \times \frac{z+1-i}{z-1-5i}$$

$Z = -1$ d'où $Z \in \mathbb{R}^*$

Alors les points A, B, M et M' sont cocycliques ou alignés

Tenvek/Mouhamedou/Moulay Zeyn
Fatimetou/MedLemine
Minetou/Abdellahi

ER Raja
7G.

Exercice 21	Bac

1) Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, on pose: $P(z)=z^3+(2-2i)z^2+(-2-8i)z-8+4i$.

a) Calculer $P(2i)$.

b) Résoudre l'équation $P(z)=0$

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère la transformation f d'expression : $z'=\frac{1}{3}iz+\frac{2}{3}+2i$.

a) Montrer que f est une similitude directe. Préciser le centre A, le rapport et un angle de f.

b) Calculer l'affixe z_C du point C image de B(-1,-3) par f. Vérifier que le triangle ABC est rectangle. Placer les points A, B et C sur la figure.

c) Calculer l'affixe z_G du point G barycentre du système $S=\{(A,2);(B,3);(C,-1)\}$.

3.a) Déterminer puis construire les trois ensembles Γ_1,Γ_2 et Γ_3 des points M du plan définis par :

$$M\in\Gamma_1 \Leftrightarrow 2MA^2+3MB^2-MC^2=16$$
$$M\in\Gamma_2 \Leftrightarrow MB^2-MC^2=16$$
$$M\in\Gamma_3 \Leftrightarrow (2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}).(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC})=0$$

b) Que peut-on dire à propos de la position relative des deux ensembles Γ_2 et Γ_3 ?

Exercice 21 Solution

a) $P(2i)=0$

b) $P(z)=0$

$P(z)=(z-2i)(z^2+2z+b)$

	1	$2-2i$	$-2-8i$	$-8+4i$
$2i$		$2i$	$4i$	$8-4i$
	1	2	$-2-4i$	0

$P(z)=(2-2i)(z^2-2z-2-4i)$

$\Delta=4-4(-2-4i)=12+16$.

$\begin{cases} x^2-y^2=12 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$
x et y de même signe

$\Rightarrow 2x^2-32 \Rightarrow x^2=16 \Rightarrow x=4$

$2y^2=8 \Rightarrow y^2=4 \Rightarrow y=2 \Rightarrow$

$\delta=4+2i$

$z_1=\frac{2+4+2i}{2}=1+i$

$z_2=\frac{-2-4-2i}{-2i}=-3-i$

$S=\{2;1+i\}$.

2) $f(M)=M' \Rightarrow z=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+2i$
$az+b$.

a) Montrons que f est une similitude directe :

Comme $|a|=|\frac{1}{3}|\neq 1$
Alors f est une similitude directe de centre A.

$z_A=\frac{b}{1-a}=\frac{\frac{2}{3}+2i}{1-\frac{1}{3}i}$

$z_A=2i$

Rapport $K=|a|=\frac{1}{3}$

angle $\theta=\arg a=\arg\frac{1}{3}i=\frac{\pi}{2}$.

$f, S\{A_3.\frac{1}{3};\frac{\pi}{2}\}$.

1) Calcul Z_c tel que $C = f(B)$

$f(M) = M' \Rightarrow z' = \frac{1}{3} z + \frac{2}{3} + 2i$

$f(B) = C \Rightarrow Z_C = \frac{1}{3} i Z_B + \frac{2}{3} + 2i$

$Z_C = \frac{1}{3} i(-1-3i) + \frac{2}{3} + 2i$

$= -\frac{1}{3} i + 1 + \frac{2}{3} + 2i$

$Z_C = \frac{5}{3} + \frac{5}{3} i$

$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{\frac{5}{3} + \frac{5}{3} i - 2i}{-1-3i-5i}$

$= \frac{5-i}{3(-1-5i)} = \frac{i(-5i-1)}{3(-1-3i)}$

$= \frac{1}{3} i$ imaginaire (A,B,C).

rectangle en A.

b) Demontron Z_c

$G = \text{bar}$

A	B	C
2	3	-1

$Z_G = \frac{2Z_A + 3Z_B - Z_C}{2+3-1}$

$= \frac{4i - 3 - 9i - \frac{5}{3} - \frac{5}{3}}{4}$

$Z_G = \frac{-7}{6} - \frac{10}{6} i$

3) Determinon Γ_1

$M \in \Gamma_1 = 2M_A^2 + 3M_B^2 - M_C^2 = 16$

$\Rightarrow f(G) = 4MG^2 = 16$

$f(G) = 2GA^2 + 3GB^2 - GC^2$

$G_A^2 = |Z_A - Z_G|^2 = \frac{533}{36}$

$G_B^2 = |Z_B - Z_G|^2 = \frac{165}{36}$

$G_C^2 = |Z_C - Z_G|^2 = \frac{689}{36}$

$f(G) = \frac{1066 + 195 - 689}{36}$

$f(G) = \frac{143}{9}$

$\Rightarrow M \in \Gamma_1 \Rightarrow f(G) + 4MG^2 = 16$

$\frac{143}{9} + 4MG = 16$

$4 \cdot MG^2 = \frac{1}{9}$

$MG = \frac{1}{6}$

$\Gamma = \mathcal{C}(G, \frac{1}{6})$.